

FICHE METHODES

Situation-exemple :

L'établissement d'aide par le travail « La moulinette » pratique le maraîchage bio et vend ses récoltes sous forme de paniers de saison.

Les chiffres d'affaires annuels en euros, réalisés depuis 2016 sont :

2016 : 1 731€ ; 2017 : 1 979 € ; 2018 : 2 227 € ; 2018 : 2 475 €

1. Comment montrer que ces valeurs forment une suite arithmétique.

Comment calculer la raison de la suite.

Solution

1 731, 1 979, 2 227 et 2 475 sont les quatre premiers termes d'une suite numérique.

Dans cette suite : $U_1 = 1\,731$, $U_2 = 1\,979$, $U_3 = 2\,227$, $U_4 = 2\,475$.

On calcule les écarts entre deux termes consécutifs¹ tout au long de la suite :

- $U_2 - U_1 = 1\,979 - 1\,731 = 248$
 - $U_3 - U_2 = 2\,227 - 1\,979 = 248$
 - $U_4 - U_3 = 2\,475 - 2\,227 = 248$
- Les écarts sont égaux.
La suite est bien arithmétique.
Sa raison est $r = 248$

En bref,

Pour montrer qu'une suite est arithmétique :

Montrer que la **différence entre deux termes consécutifs** est **constante** pour **tous les termes donnés**.

Le résultat est la raison **r** de la suite.

Les calculs :

$$r = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 \\ = U_4 - U_3 = \dots = U_n - U_{n-1}$$

2. Comment exprimer U_n en fonction de n .

Solution

La suite (U_n) a pour premier terme $U_1 = 1\,731$ et pour raison $r = 248$.

Puisqu'il s'agit d'une suite arithmétique, on sait que :

$$U_n = U_1 + (n - 1) \times r$$

D'où, $U_n = 1\,731 + (n - 1) \times 248$ ← Expression issue de la formule

$$U_n = 1\,731 + n \times 248 + (-1) \times 248$$

$$U_n = 1\,731 + 248n - 248$$

$$U_n = 1\,483 + 248n$$
 ← La même expression sous sa forme simplifiée

En bref,

Pour exprimer le terme U_n d'une suite arithmétique :

- Utiliser la formule du $n^{\text{ième}}$ terme :

$$U_n = U_1 + (n - 1) \times r$$

- Remplacer par les valeurs connues, de U_1 et r .

- Développer les parenthèses.

- Simplifier l'écriture en calculant ce qui peut l'être.

3. Comment montrer que la suite est croissante ou décroissante.

Solution 1

La raison $r = 248$ est positive. La suite est donc croissante.

Solution 2

On sait que $U_n = 1483 + 248n$

alors $U_{n+1} = 1483 + 248(n+1) = 1483 + 248n + 248 = 1731 + 248n$

On trouve que $U_{n+1} > U_n$ pour toutes valeurs de n .

La suite est donc croissante.

En bref,

Pour montrer qu'une suite est croissante ou décroissante :

Solution 1 - Calculer la raison de la suite. (Voir méthode 1)

Si $r > 0$, alors la suite est croissante

Si $r < 0$, alors elle est décroissante

Solution 2 – exprimer U_{n+1} et comparer à U_n

Si $U_{n+1} > U_n$, alors la suite est croissante

Si $U_{n+1} < U_n$, alors elle est décroissante

4. Comment calculer la somme totale gagnée entre 2016 et 2029 si le chiffre d'affaires annuel poursuit la même progression.

Solution 1

--- En utilisant le tableur :

	A	B	C	D
1	n	U_n	Somme des 14 termes :	
2	1	1731	46802	
3	2	1979		
4	3	2227	=B2+248	
5	4	2475	Ou	
6	5	2723	=1731+(A2-1)*248	
7	6	2971	Ou	
8	7	3219	=1483+248*A2	
9	8	3467		
10	9	3715		
11	10	3963		
12	11	4211		
13	12	4459		
14	13	4707		
15	14	4955		

En bref,

Pour calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

Avec le tableur - Excel :

Compléter la colonne des valeurs de n :

Ecrire 1 et 2 puis sélectionner les deux cellules et étendre jusqu'à la dernière valeur voulue.

Compléter la colonne des valeurs de U_n :

Ecrire la première valeur connue, U_1 puis saisir dans la cellule suivante une des formules disponibles

Calculer la somme des n premiers termes :

Saisir dans une cellule quelconque la formule de la somme

= somme(... : ...)

« Clic » sur la cellule qui contient U_1 « Clic » sur la cellule qui contient le dernier terme additionné

Solution 2

--- En calculant les quatorze termes et en les additionnant un à un :

$$S_{14} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9 + U_{10} + U_{11} + U_{12} + U_{13} + U_{14}$$

$$U_1 = 1731, U_2 = 1979, U_3 = 2227, U_4 = 2475, U_5 = 2723, U_6 = 2971,$$

$$U_7 = 3219, U_8 = 3467, U_9 = 3715, U_{10} = 3963,$$

$$U_{11} = 4211, U_{12} = 4459, U_{13} = 4707, U_{14} = 4955$$

$$D'où, S_{14} = 46802$$

Solution 3

--- En utilisant la formule de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

$$S_n = n \times \frac{(U_1 + U_n)}{2}$$

Pour additionner les 14 premiers termes de la suite des chiffres d'affaires, on calcule :

$$S_{14} = 14 \times \frac{(U_1 + U_{14})}{2}$$

$$\text{Calcul de } U_{14} : U_{14} = U_1 + 13 \times 248 = 1731 + 13 \times 248 = 4955$$

Donc :

$$S_{14} = 14 \times \frac{(1731 + 4955)}{2} = 46802$$

Le chiffre d'affaires prévisionnel total gagné par « La moulinette » entre 2016 et 2029 est de 46 802 €

En bref,

Pour calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

La solution 2 n'est pertinente qu'en cas de suite contenant peu de nombres. Les calculs ci-contre sont déjà longs à effectuer...

La solution 3 est la plus rapide :

Utiliser la formule de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

$$S_n = n \times \frac{(U_1 + U_n)}{2}$$

Repérer le nombre de terme à additionner. (Valeur de n)

Repérer la valeur de U_1 et de la raison

Ou,

Repérer l'expression de U_n en fonction de n.

Puis,

Calculer la valeur du dernier terme additionné

Remplacer n, U_1 , U_n par leurs valeurs dans la formule.

Calculer

5. Comment représenter graphiquement les huit premiers termes de cette suite arithmétique.

Solution

La suite (U_n) a pour expression $U_n = 1483 + 248 \times n$

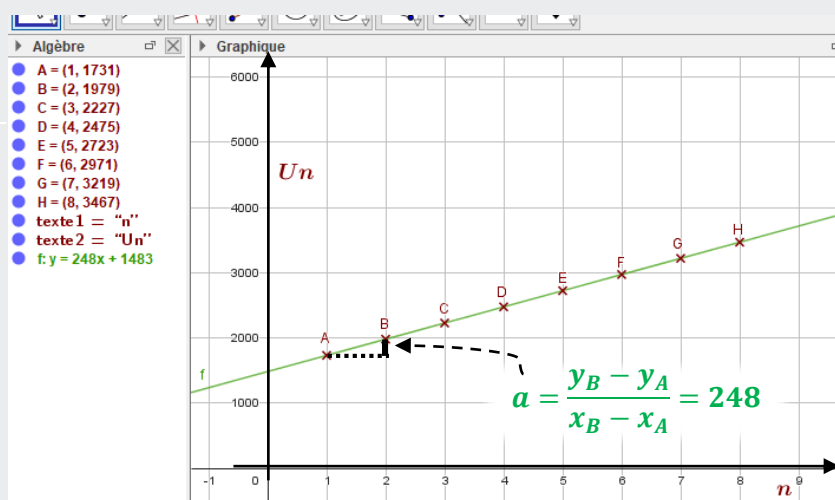
On connaît les quatre premiers termes, U_1, U_2, U_3, U_4 .

On calcule les quatre suivants :

- $U_5 = 1483 + 248 \times 5 = 2723$ ou $U_5 = U_4 + 248 = 2723$
- $U_6 = 1483 + 248 \times 6 = 2971$ ou $U_6 = U_5 + 248 = 2971$
- $U_7 = 1483 + 248 \times 7 = 3219$ ou $U_7 = U_6 + 248 = 3219$
- $U_8 = 1483 + 248 \times 8 = 3467$ ou $U_8 = U_7 + 248 = 3467$

Graphiquement, chaque terme correspond à un point de coordonnées $(n ; U_n)$:

$(1 ; 1731) ; (2 ; 1979) ; (3 ; 2227) ; (4 ; 2475) ;$
 $(5 ; 2723) ; (6 ; 2971) ; (7 ; 3219) ; (8 ; 3467)$



Les points sont alignés.

Ils appartiennent à une **droite** de coefficient directeur **a=248**.

En bref,

Pour représenter graphiquement une suite arithmétique :

La solution point par point :

Calculer les termes à représenter
Placer les points de coordonnées

$(n ; U_n)$

Exemple : le point A correspond au terme U_1 ; ses coordonnées sont A(1 ; 1731)

Sur Geogebra, dans la fenêtre saisie, écrire : A=(1,1731)

La solution du tableur - Excel :

Sélectionner les deux colonnes de valeurs, celle de n et celle de U_n — puis « insertion graphique » et sélectionner « nuage de points »

La solution du tableur - Geogebra :

Sélectionner les deux colonnes de valeurs — puis clic droit et sélectionner « créer » puis « liste de points »

Le résultat :

Les points représentant une suite arithmétique de nombres sont toujours alignés.

Ils appartiennent à une droite dont le coefficient directeur est la raison de la suite.

Lorsque la suite est croissante, la droite est ascendante.

Lorsque la suite est décroissante, la droite est descendante.

Dans notre cas, la raison est positive : $r = 248$

La suite est croissante puisque $r > 0$

La droite qui passe par les points qui représentent la suite est ascendante.

Son coefficient directeur est 248.