LA FONCTION INVERSE

La forme générale d'une fonction inverse $\boldsymbol{f}$ est,

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

nombre de départ, variable
antécédents

nombre associé, $f(x)$
images

Son domaine de définition est $\mathbb{R}^*$. ($\mathbb{R}$ **sauf 0**)

Son expression algébrique générale est,

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Une fonction **inverse** est une « machine » mathématique qui transforme un **nombre donné x** en **un autre $\frac{1}{x}$.**

x, est une variable qui peut prendre toute valeur de l'ensemble $\mathbb{R}^*$: **tous les nombres réels sauf 0.**

Des exemples de calcul :

$$g(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$g(-3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

$$g(0{,}5) = \frac{1}{0{,}5} = 2$$

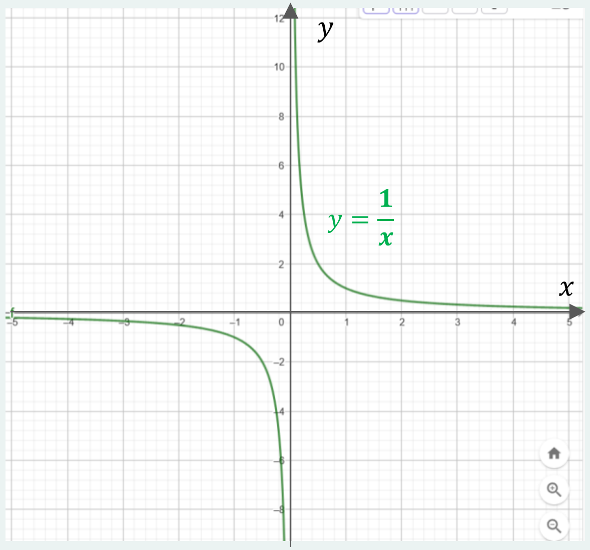
$$g(0{,}0001) = \frac{1}{0{,}0001} = 10\ 000$$

$$g(1000) = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Sa représentation graphique

La **représentation graphique** d'une **fonction inverse** définie sur $\mathbb{R}^*$ est une **hyperbole**.

La relation de la courbe est : $y = \frac{1}{x}$



Ses variations

Sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$, la fonction inverse est,

- **Décroissante lorsque $x \in]-\infty\,;0[$**
- **Décroissante, lorsque $x \in]0\,;\,+\infty[$**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0 (-) ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0 (+)

La fonction f n'est pas définie en $x = 0$.

Lieux remarquables – autour de l'axe (Oy)

Les **deux branches** de **l'hyperbole** sont indépendantes l'une de l'autre.

Chacune se rapproche de chaque axe du repère sans jamais les atteindre :

Aucune ne coupe l'axe (Oy).

Propriété

La courbe admet un **centre de symétrie :**

Le point O (0 ; 0)

Propriété

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1 \quad et \quad f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$$

$$f(2) = \frac{1}{2} = 0,5 \quad et \quad f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$f(0,1) = \frac{1}{0,1} = 10 \quad et \quad f(-0,1) = \frac{1}{-0,1} = -10$$

…

$$f(x) = -f(-x) \text{ quel que soit } x \in \mathbb{R}^*$$

La fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$

Le cas des fonctions issues de la fonction inverse (1)

$f(x) = a \times \frac{1}{x}$ *ou* $f(x) = \frac{a}{x}$; *a est un réel non nul*

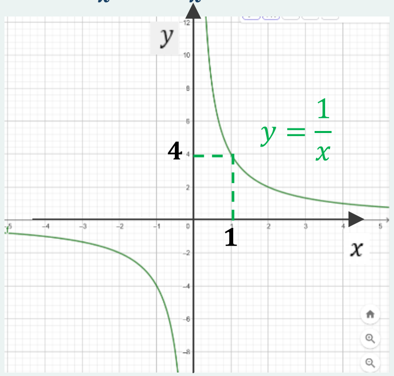
Exemples : $f(x) = 4 \times \frac{1}{x}$; $f(x) = \frac{-200}{x}$; $f(x) = 6{,}5 \times \frac{1}{x}$; etc.

L'ensemble des fonctions de cette forme sont définies sur $\mathbb{R}^*$: ensemble de tous les nombres réels **sauf 0.**

Cas où $a > 0$

exemple : $f(x) = 4 \times \frac{1}{x}$ *ou* $\frac{4}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0 (-) ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0 (+)

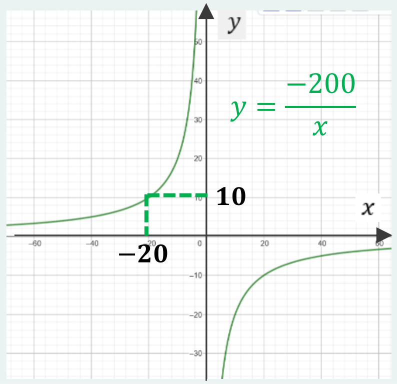


Cas où $a < 0$

Exemple : $f(x) = -200 \times \frac{1}{x}$ *ou* $\frac{-200}{x}$

Le sens de variation est inversé.

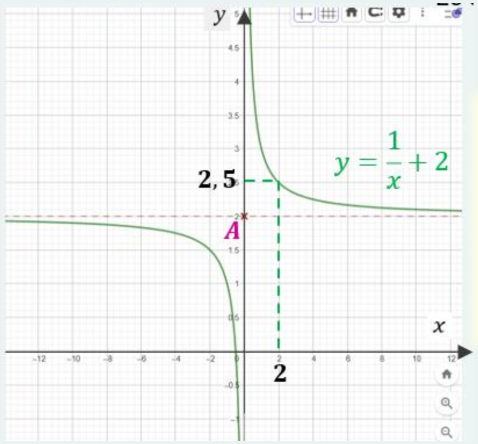
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0 (+) ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 0(+)



Le cas des fonctions issues de la fonction inverse (2)

$f(x) = \frac{1}{x} + b$ où *b est un réel*

Le sens de variation des fonctions $f: x \mapsto \frac{1}{x} + b$ est identique à celui de $f: x \mapsto \frac{1}{x}$



Fonction $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} + 2$

La courbe représentative est une hyperbole.

Son centre de symétrie est A(0 ; 2).

Fonction $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} - 2$

La courbe représentative est une hyperbole.

Son centre de symétrie est A(0 ; -2).