Résolution algébrique d'une équation (3) du premier degré à une variable

Fiche méthode

Cette procédure permet de n'avoir à **tester** qu'une seule valeur : celle mise en évidence par la **forme lisible** de **l'équation.**

Sommaire | page

EXEMPLE RÉSOLU

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $5x + 2 = 3x - 6$.

Le domaine de valeurs de la variable x est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$.

$5x + 2 = 3x - 6$

$\Leftrightarrow 5x + 2 - \mathbf{2} = 3x - 6 - \mathbf{2}$

$\Leftrightarrow 5x + 2 = 3x - \mathbf{8}$

$\Leftrightarrow 5x - \mathbf{3x} = 3x - 6 - \mathbf{3x}$

$\Leftrightarrow \mathbf{2x} = -8$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{-8}{\mathbf{2}}$

$\Leftrightarrow 1\boldsymbol{x} = \mathbf{-4} \quad \boldsymbol{ou} \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{-4}$

Test de la valeur « -4 » :

$5 \times (-4) + 2 = 3 \times (-4) - 6$

$Donne : \ \mathbf{-18 = -18}$

Cette égalité est vraie et « -4 » est un nombre réel.

L'équation $5x + 2 = 3x - 6$ a pour solution $x = -4$.

L'ensemble des solutions s'écrit : $\mathcal{S} = \{\text{-}4\}$

Méthode

Résoudre algébriquement une équation du premier degré à une inconnue c'est,

- Identifier le domaine de valeurs de la variable x ;

  Cela peut être $\mathbb{R}$ (2) ou un ensemble plus petit c'est-à-dire un intervalle de $\mathbb{R}$; cela dépend de la situation travaillée.

  La variable x peut prendre toute valeur de ce domaine.

- Effectuer des opérations de chaque côté du signe « = » par étape successives

  Il s'agit des opérations sur les égalités (1).
  Chaque ligne est **équivalente (« ⇔ »)** aux autres et correspond à la même équation.

- Aboutir à la **forme lisible de l'équation :** $x = un\ nombre$
  Vérifier que ce nombre appartient bien au domaine de valeurs indiqué.
  Cette étape se lit : **« x peut-il être égal à - 4 ? » et appelle le test qui suit.**

- Tester ce nombre dans l'équation de départ pour vérifier si l'égalité obtenue est Vraie ou Fausse.

- Conclure : indiquer la ou les solutions en utilisant la notation adaptée.

(1) Les égalités

En mathématique,

Une égalité est immédiatement soit vraie soit fausse.

$3 \times 2 = 5$, est une égalité vraie.

$5 = 7$, est une égalité fausse.

$5x = 7$, la vérité de cette expression dépend de la valeur de la variable x utilisée. C'est une équation.

Devient une égalité fausse

$5 = 5 + 2$

$5 \times 2 = 5$

Les opérations sur une **égalité vraie** effectuées **d'un seul côté du signe « = »** modifient le sens de cette égalité et aboutissent à une **égalité fausse.**

Ces égalités issues de $5 = 5$ demeurent vraies

$5 + 2 = 5 + 2$

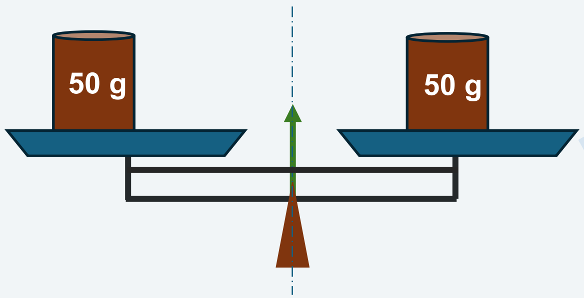
$5 - 2 = 5 - 2$

$5 \times 2 = 5 \times 2$

$5 \div 2 = 5 \div 2$

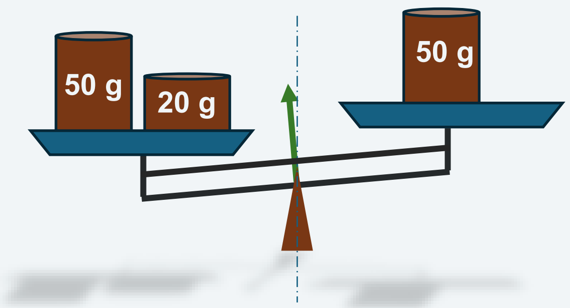
Les opérations sur les égalités qui conservent le sens de **l'égalité vraie** de départ sont effectuées de **chaque côté de l'égalité**.

L'ANALOGIE DE LA BALANCE



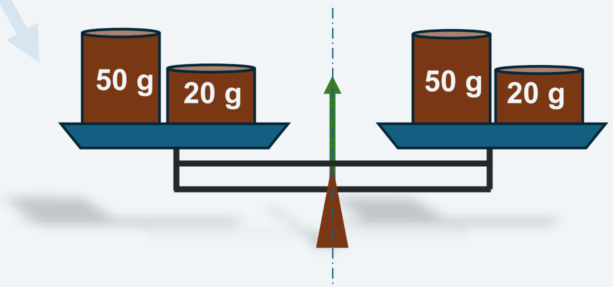
La balance est équilibrée

L'égalité mathématique 50 = 50 est vraie



La balance devient déséquilibrée.

L'égalité mathématique $50 + 20 = 50$ est fausse.



La balance reste équilibrée.

L'égalité mathématique

$50 + 20 = 50 + 20$, est vraie

(2) Les nombres réels – l’ensemble $\mathbb{R}$ et les intervalles de $\mathbb{R}$

L’ensemble des nombres réels ou ensemble des réels est désigné par $\mathbb{R}$.

Comme pour les autres ensembles, Il s’agit d’un **ensemble infini.**

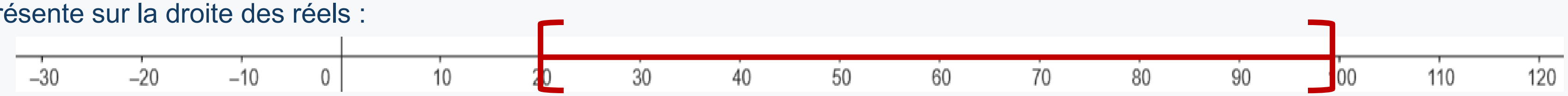
Contrairement aux autres ensembles : les nombres réels s’écoulent de façon continue ; cela se représente sous la forme d’une droite.

La droite des réels :

L’intervalle [20 ; 100] est un intervalle de $\mathbb{R}$ **:** $[\mathbf{20}\,;\,\mathbf{100}] \subset \mathbb{R}$.

L’intervalle [20 ; 100] est un ensemble infini de nombres réels.

On le représente sur la droite des réels :



Tous les nombres compris entre 20 et 100, 10 et 100 compris

Une équation (3) du premier degré à une variable (ou à une inconnue)

$\mathbf{5x + 2 = 3x - 6}$**,** est une équation du premier degré à une variable car,

* « = » établit l’**égalité** entre deux membres de **même nature** --- termes en x et/ou termes sans x
* x**, est une variable** qui peut prendre une infinité de valeurs.
* **La variable x est élevée à la puissance 1 au maximum – c’est le *degré* de l’équation.**

$$5x + 2 = 3x - 6 \quad \textit{peut également s'écrire} \quad 5 \times x^1 + 2 = 3 \times x^1 - 6$$

Des exemples d’équations du premier degré à une variable sur $\mathbb{R}$:

$\mathbf{0,12x = 5}$ $\quad$ $\mathbf{4x + 6 = 0}$ $\quad$ $\mathbf{8 = 2 + x}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\mathbf{x = 10}$ $\quad$ $\mathbf{0 = 2x + 5}$ $\quad$ $\mathbf{8 = 5x}$ $\quad$ $\mathbf{5 = 2x + 1}$ $\quad$ $\mathbf{3x + 2 = 12}$

EXEMPLE RÉSOLU 2 : la question du domaine de valeurs

Résoudre sur [20 ; 100] l'équation $-5x + 2 = 3x - 6$.

Le domaine de valeurs de la variable x est l'ensemble des nombres réels de l'intervalle **[20 ; 100]** inclus dans $\mathbb{R}$.

$-5x + 2 = 3x - 6$

$\Leftrightarrow -5x + 2 - \mathbf{2} = 3x - 6 - \mathbf{2}$

$\Leftrightarrow -5x = 3x - \mathbf{8}$

$\Leftrightarrow -5x - \mathbf{3x} = 3x - 8 - \mathbf{3x}$

$\Leftrightarrow -\mathbf{8x} = -8$

$\Leftrightarrow \dfrac{-8x}{\mathbf{-8}} = \dfrac{-8}{\mathbf{-8}}$

$\Leftrightarrow 1\boldsymbol{x} = \mathbf{1} \quad \boldsymbol{ou} \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$

Test de la valeur « -4 » :
$-5 \times 1 + 2 = 3 \times 1 - 6$

Donne : $\mathbf{-3 = -3}$

Cette égalité est vraie et $1 \notin [20\,;100]$.

L'équation $-5x + 2 = 3x - 6$ a pour solution $x = 1$ dans $\mathbb{R}$ mais n'a pas de solution dans l'intervalle [20 ; 100].

L'ensemble des solutions de l'équation $-5x + 2 = 3x - 6$ sur l'intervalle [20 ; 100] est **vide** et s'écrit : $\mathcal{S} = \{\quad\}$ ou $\emptyset$

EXEMPLES RÉSOLUS 3 et 4 : deux cas particuliers

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $5x = 5x - 6$.

Le domaine de valeurs de la variable x est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

$5x = 5x - 6$

$\Leftrightarrow 5x - \mathbf{5x} = 5x - \mathbf{5x} - 6$

$\Leftrightarrow \mathbf{0x} = -6$

Aucune valeur ne peut vérifier cette équation.

L'équation $5x = 5x - 6$ n'a pas de solution et $\mathcal{S} = \emptyset$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x + 2 + 2x = 5x + 2$.

Le domaine de valeurs de la variable x est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

$3x + 2 + 2x = 5x + 2$

$\Leftrightarrow 3x + 2 + 2x - \mathbf{2} = 5x + 2 - \mathbf{2}$

$\Leftrightarrow 3x + 2x = 5x$

$\Leftrightarrow 5x - \mathbf{5x} = 5x - \mathbf{5x}$

$\Leftrightarrow \mathbf{0x} = \mathbf{0}$

Tous les nombres réels vérifient cette équation.

L'équation $3x + 2 + 2x = 5x - 6 + 8$ a une infinité de solutions et $\mathcal{S} = \mathbb{R}$